

Corso di Fisica moderna di base
Modulo 1: Elementi di Struttura della Materia

**ATTENZIONE: LE SEGUENTI PAGINE SONO INTESE COME UNO SCHEMATICO
RIASSUNTO DI QUANTO TRATTATO IN AULA, NON PRETENDONO DI ESSERE
ESAURIENTI O SOSTITUTIVE ALLE LEZIONI STESSE**

Lezione 3.1 Cenni di relatività ristretta

Riserratevi con qualche amico nella maggior stanza che sia sotto coverta di alcun gran naviglio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti [...] e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza [...] e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose [...] fate muover la nave con quanta si voglia velocità: che (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma

(Galileo, *Dialogo*, giornata seconda)

Dal principio di inerzia alla definizione di “sistema inerziale”

Il principio di inerzia di Newton asserisce che un corpo permane nel suo stato di moto imperturbato (stato di quiete o di moto rettilineo uniforme), se non è sottoposto a forze esterne.

Questo però non vale in tutti i sistemi di riferimento. Siamo perciò condotti a dare la definizione di

Sistema Inerziale: un sistema di riferimento tale che, rispetto ad esso, che un corpo permane nel suo stato di moto imperturbato (stato di quiete o di moto rettilineo uniforme), se non è sottoposto a forze esterne.

Per verificare le proprietà di un sistema, è utile ricordare la forma generale in cui posso scrivere l'equazione del moto rettilineo uniforme unidimensionale, caratterizzato da una velocità v :

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Vediamo che per definire un sistema inerziale devo mettere in relazione i concetti di spazio e tempo.

Definiamo **evento** un insieme di numeri (x, y, z, t) , o nel caso unidimensionale (x, t) .

Il principio di relatività galileiano e le trasformazioni galileiane (TG)

tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti, nel senso che le leggi della fisica newtoniana si esprimono nella stessa forma in ognuno di essi. Gli esperimenti porteranno a risultati identici.

Se ho due sistemi di riferimento inerziali, cerco una relazione che permetta di “tradurre” la descrizione di un osservatore che utilizza un determinato sistema $S(x, t)$ in quella data dall'osservatore che utilizza l'altro, $S'(x', t')$. Questa si chiama “trasformazione”.

La trasformazione galileiana è molto semplice:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Equazione 1

se u , che per semplicità consideriamo di direzione solo lungo l'asse x , è la velocità con cui S vede muoversi S' .

Un cannone fisso sulla costa, nel punto $x=0$, è visto dalla nave S' , che viaggia a velocità u , "allontanarsi" con una legge del moto $x'=-ut$.

La trasformazione galileiana è stata formulata in modo da lasciare invarianti le distanze; inoltre un moto uniforme in un altro moto uniforme, dove la velocità di un oggetto è differente, ma si ottiene da una semplice legge di composizione delle velocità.¹

$$v'=v+u$$

Equazione 2

ad esempio, se sulla costa il cannone spara un proiettile (verso la nave) con velocità, misurata da terra, v , dalla nave misurano una velocità, per lo stesso proiettile, pari a $v'=v-u$ (perché "- u " è la velocità con cui sembra viaggiare la terra dalla nave).

Le accelerazioni non variano.

Perché devo introdurre le trasformazioni di Lorentz (TL)

Alla fine del secolo XIX erano emerse delle forti contraddizioni, tra la meccanica newtoniana e la teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell. Nel 1873 Maxwell pubblicò il trattato sull'elettromagnetismo; la teoria contiene la costante "universale" c , che ha le dimensioni di una velocità. Essa era stata introdotta già nel 1820, da Oersted, per poter confrontare fenomeni magnetici ed elettrici. Nel 1856 W.Weber aveva osservato che il valore di c coincideva con quello misurato per la velocità della luce. Dopo il successo maxwelliano sulla teoria delle onde elettromagnetiche, si accettò il fatto che la luce viaggiasse con la velocità universale c . Ma questa ipotesi non è compatibile con la semplice legge di composizione delle velocità eq. 2.

La soluzione consiste o nel modificare le eq.ni di Maxwell in modo che esse soddisfino alla eq. 2, in particolare c dovrebbe variare nei diversi sistemi inerziali in moto uniforme uno rispetto all'altro, oppure trovare un nuovo tipo di trasformazione, che soddisfi la condizione che c resti la stessa in tutti i riferimenti in moto rettilineo ed uniforme uno rispetto all'altro.

La prima via si è dimostrata non percorribile. È stato perciò trovato un nuovo tipo di trasformazioni, dette di Lorentz, che soddisfano a quanto richiesto. Utilizzando queste trasformazioni la meccanica classica, quella newtoniana, non è invariante. Dovrò quindi cercare anche una nuova meccanica!!!

Per giustificare il fatto che la meccanica newtoniana dia buone previsioni quando le velocità in gioco sono molto minori di c , deve valere un "principio di corrispondenza": la nuova meccanica, quando le velocità sono piccole rispetto a c , dovrà dare le stesse previsioni della meccanica newtoniana.

Dal punto di vista storico, le trasformazioni di Lorentz furono scoperte e pubblicate per la prima volta da Joseph Larmor nel 1897. Nel 1905, Henri Poincaré, il famoso matematico, le battezzò in onore del fisico e matematico Hendrik Lorentz, il quale ne aveva pubblicato la propria versione nel 1904. Fu lo stesso Poincaré che revisionò il formalismo delle trasformazioni, per convertirle nella forma che conosciamo oggi.

Lorentz scoprì nel 1900 che le trasformazioni erano compatibili con le equazioni di Maxwell, ma egli le inserì in una propria "teoria dell'etere"; in particolare, secondo Lorentz, le trasformazioni esprimevano il fatto che un oggetto, viaggiando a grandi velocità all'interno di un etere, si contraesse concretamente, come "schiacciato". Fu Albert Einstein, sviluppando la teoria della relatività ristretta, che diede un appropriato fondamento teorico alle equazioni.

Trasformazioni di Lorentz (TL)

Nell'ambito di questo corso non c'è spazio per introdurre seriamente le TL. Le riportiamo "brutalmente", dicendo semplicemente che sono più generali delle TG, pur rispettando alcuni criteri fondamentali di cui la fisica ha bisogno (per es. isotropia dello spazio...). Esse permettono alla luce di possedere una velocità "universale" c , e, per velocità piccole rispetto a c , si approssimano alle trasformazioni di Galilei. Si scrivono:

¹Per nostra convenzione, adottiamo la lettera " v " per le velocità che gli oggetti hanno in un determinato sistema di riferimento, con la lettera " u " la velocità di un sistema di riferimento rispetto all'altro.

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

Equazione 3

Introduco $\beta = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, il cosiddetto “fattore relativistico”.

Per semplificare la scrittura si usa solitamente $\gamma = 1/\beta$:

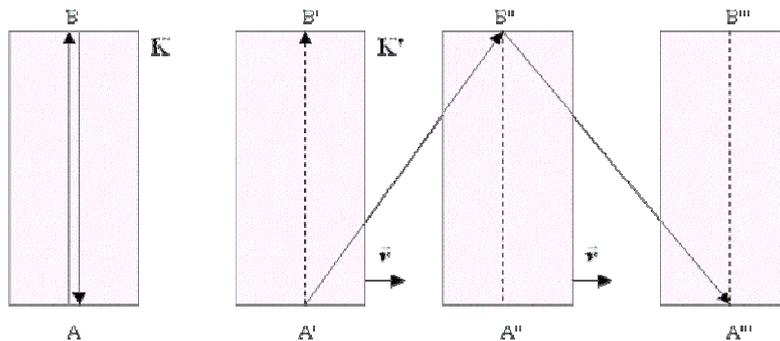
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Equazione 4

e la trasformazione si scrive:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases}$$

Possiamo in maniera semplice vedere come emerge, con un semplice esperimento mentale detto “dell’orologio di luce”, il fattore γ .



Per l'osservatore solidale con l'orologio in moto relativo, diciamo nel sistema K' , il raggio di luce continua a riflettersi fra i due specchi, perpendicolarmente ad essi. Ma per un osservatore del sistema K , solidale con l'orologio che per noi è in quiete, il moto del raggio di luce si compone con quello traslatorio dell'orologio, di velocità u (attenzione, nella figura è erroneamente scritto v) e si ha la traiettoria diagonale della figura: non più $2AB$, ma $A'B'' + B''A'''$. Ora, sia Δt il tempo misurato dall'orologio a luce in K per arrivare da A a B e tornare indietro, e $\Delta t'$ il tempo misurato in K' per percorrere uno spazio uguale. È chiaro che $\Delta t < \Delta t'$, essendo $AB < A'B''$; essendo la velocità della luce costante in ogni sistema di riferimento, risulta:

$$A'B'' = c \Delta t' , A''B'' = c \Delta t , A'A'' = u \Delta t'$$

per il teorema di Pitagora:

$$A'B''^2 = A''B''^2 + A'A''^2$$

Da cui:

$$c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 + u^2 \Delta t'^2$$

cioè:

$$(c^2 - u^2) \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2$$

con facili passaggi algebrici, si ricava:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Il denominatore è sempre minore di uno, quindi l'intervallo di tempo tempo misurato nel sistema K' è sempre maggiore di quello misurato nel sistema K fra due eventi apparentemente contemporanei, come si vede in figura. Per l'orologio in moto, insomma, il tempo **passa più lentamente**. È questo il fenomeno noto come **DILATAZIONE DEI TEMPI**.

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Equazione 5

La contrazione di Lorentz

In un sistema in moto uniforme con velocità u , le lunghezze appaiono contratte per un fattore β , in modo analogo a quello in cui i tempi sono dilatati. Quando si dice “modo analogo” si intende che esiste proprio una relazione per cui, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle velocità sono strettamente correlate.

La lunghezza maggiore di un oggetto si ha quando il sistema di riferimento è solidale con l'oggetto, ovvero quando chi la misura lo “vede” fermo. Questa “lunghezza massima” viene chiamata “lunghezza a riposo”.

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - ut_2) - \gamma(x_1 - ut_1) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

$$L = \gamma^{-1} L_0 = L_0 \times \sqrt{1 - \beta^2}$$

Equazione 6

Es. Vita media dei muoni

Consideriamo un muone prodotto dai raggi cosmici alla periferia dell'atmosfera, diciamo a 16 Km di altezza. La velocità del muone è tipicamente $0,995 c$ mentre la sua “vita media” è di circa due milionesimi di secondo. Allora dovrebbe percorrere un percorso di circa $x=vt= 597$ metri e poi disintegrarsi. A terra non dovremmo in pratica misurarne. Valori precisi che stimano “quanti muoni” dovrebbero vedersi, e quanti in più davvero se ne osservino (più di 10 volte tanto), sono stati ricavati in diversi esperimenti. Essi ci dimostrano che visto da terra la vita del muone si allunga di un fattore γ , che in questo caso, come si calcola facilmente è pari circa a 10 (*dilatazione dei tempi*). Mettiamoci ora nei panni del muone: come mai riesco a raggiungere la Terra, se mi dicono che è così lontana? In effetti per il muone la distanza percorsa è più breve, dello stesso fattore 10; è come se dovessi percorrere “solo” 1,6 Km. Con un po' di fortuna, ce la possiamo fare (*contrazione delle lunghezze*).

Le velocità

La composizione delle velocità assume ora la forma:

$$v' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Equazione 7

Questa espressione consente alla luce di viaggiare nel vuoto con velocità c in ogni sistema di riferimento in moto uniforme. Implica anche che c è una velocità massima, che non può essere mai valicata.

Massa, impulso, energia

Come già accennato, adottare le TL al posto delle TG mi impone di trovare una nuova meccanica, che resti invariante per queste trasformazioni. In pratica, devo trovare “una fisica” le cui leggi non dipendano dal sistema di riferimento che adotto.

In particolare, la strategia che si applica nella ricerca di una nuova meccanica si può chiamare “conservazione delle leggi di conservazione”.

Ad esempio vogliamo che si abbia:

- conservazione dell’impulso (o quantità di moto), p .
- conservazione dell’energia, E .

Questo ci porta a definire una massa relativistica:

$$m(v') = \gamma m_0$$

Equazione 8

dove ora $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, con v = velocità della particella; ovvero, la massa cresce con la velocità,

mentre il valore minimo è la cosiddetta “massa a riposo”, che coincide con la misura della massa effettuata in un sistema di riferimento dove appunto la particella è a riposo. Al tendere della velocità a c , la massa tende ad infinito. Per particelle che viaggiano a velocità c (i fotoni) il fattore γ non è ben definito.

Dalla definizione di massa discende una espressione della quantità di moto, o impulso, che garantisce l’invarianza:

$$p = \gamma m_0 v$$

Equazione 9

Mentre per l’energia si ricava la nota espressione: $E = mc^2$ **Equazione 10**

Possiamo inoltre scrivere una equazione che esprime esplicitamente le relazioni tra energia ed impulso:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Equazione 11

Se la particella è ferma, vale la relazione $E_0 = m_0 c^2$

Nota: Si definisce “energia a riposo” quella di una particella ferma rispetto al sistema di riferimento ($\gamma=1$). Grazie a questa relazione, è possibile esprimere la massa di una particella in unità di misura tipica dell’energia (tipicamente eV o MeV).

Se ho a che fare con una particella di massa a riposo nulla (es un fotone), l’energia si esprime con

$$E = hv = pc \text{ da cui un impulso } p = hv/c.$$

Equazione 12

Si noti che, per tali particelle, il fattore γ non è ben definito, presenta una discontinuità.

Energia da massa

Secondo la relatività, la massa può essere convertita in energia. È questo il principio che viene sfruttato nelle centrali nucleari, come si vedrà meglio nel secondo modulo del corso. Ad esempio, senza tenere conto dei diversi fattori che limitano la conversione totale della massa in energia, 1 Kg corrisponde a $9 \cdot 10^{16}$ Joules di energia, mentre il fabbisogno di un cittadino americano per anno è dell'ordine dei $5 \cdot 10^{11}$ Joules.

Schemino riassuntivo:

- Contraddizione tra legge di composizione delle velocità e Maxwell
- La velocità della luce è indipendente dalla velocità della sorgente e dell'osservatore c è una costante universale
- Le leggi della fisica sono invarianti per Trasformazioni di Lorentz
- Le trasformazioni di Galileo ed il concetto di tempo universale debbono essere abbandonate
- Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi (decadimento dei muoni nell'atmosfera)
- La conservazione dell'impulso conduce alla massa relativistica
- La velocità della luce è una velocità limite nell'Universo (legge di composizione relativistica delle velocità)
- Relazione tra massa relativistica, energia, impulso.

Materiali:

Sulla relatività e $E=mc^2$

<http://www.aip.org/history/einstein/emc1.htm>

trad. in inglese articolo originale di Einstein del 1905:

<http://metric.iem.csic.es/luisgaray/edc/einstein1905-1.pdf>

idem, per aggiunta su relazione di energia e massa:

<http://metric.iem.csic.es/luisgaray/edc/einstein1905-2.pdf>

è in rete un corso di rel ristretta pensato per liceo classico e/o insegnanti dal grande fisico italiano bruno touschek:

<http://www.fisicamente.net/RelatiTou.pdf>