Corso di Fisica moderna di base

Modulo 1: Elementi di Struttura della Materia

ATTENZIONE: LE SEGUENTI PAGINE SONO INTESE COME UNO SCHEMATICO RIASSUNTO DI QUANTO TRATTATO IN AULA, NON PRETENDONO DI ESSERE ESAURIENTI O SOSTITUTIVE ALLE LEZIONI STESSE

Ulteriori avvertenze:

1) **la presente unità non è stata completata a lezione, per quanto riguarda il paragrafo sulla legge di Planck. È però qui riportato per completezza dell'argomento stesso. La parte sarà trattata in aula martedì 5 dicembre.**
2) **È stato aggiunto un facile esempio alla fine della dispensa, per chi non avesse ancora ben digerito la parte sul numero di modi di oscillazione di un'onda stazionaria all'interno di una cavità.**
3) **E.C. Nella dispensa 1, a pagina 4 riga 6, "positivo" va corretto con "negativo".**

Lezione 2 Lo studio della radiazione di corpo nero

2.1 Introduzione alla spettroscopia, prime definizioni: potere emissivo, assorbente e corpo nero

Un campo di ricerca che è particolarmente importante negli anni a cavallo tra il XIX ed il XX secolo è quello che si dedica allo studio della *radiazione di CORPO NERO*.

È noto che un corpo caldo emette radiazione; se è sufficientemente caldo, emette radiazione nel visibile, con un colore che dipende strettamente dalla temperatura. La spettroscopia scompone ed analizza la radiazione emessa da sorgenti, inizialmente solo di laboratorio; in seguito la stessa tecnica fu applicata anche allo studio delle "sorgenti" celesti (>>questa esplorazione sancisce la nascita dell'astrofisica). L'idea fondamentale fu quella di comprendere che ogni riga spettrale è tipica della composizione chimica dell'elemento che la emette.

Furono Kirchhoff e Bunsen a porre le fondamenta basi dell'analisi spettroscopica: Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) nel 1859 mise in relazione le righe, ottenute da una analisi eseguita in laboratorio dello spettro del Sodio, e le corrispondenti righe che si osservavano nello spettro solare. Su questa base iniziò, insieme a Robert Wilhelm Bunsen, l'analisi chimica a distanza sui corpi celesti. L'anno successivo, nel 1860, Kirchhoff e Bunsen pubblicavano un famoso lavoro, che introduceva e definiva il problema del corpo nero.

In generale, data una cavità mantenuta ad una certa temperatura, questa si riempie di radiazione su ogni frequenza. Nell'ipotesi che si raggiunga l'equilibrio, si vuole individuare la forma della funzione che esprime l'energia emessa dalla cavità per unità di superficie.

Definiamo:

- w_λ *Potere emissivo* o emittanza monocromatica (l'energia irradiata per unità di tempo, per unità di superficie, in un intervallo di lunghezza d'onda $d\lambda$);

- a_λ *Potere assorbente* (rapporto tra energia assorbita e energia incidente, è la frazione di energia incidente che viene effettivamente assorbita).

Il potere assorbente esprime la capacità di un corpo di assorbire l'energia incidente. L'energia non assorbita viene riflessa. Esiste infatti anche un coefficiente detto "potere riflettente r_λ", così che

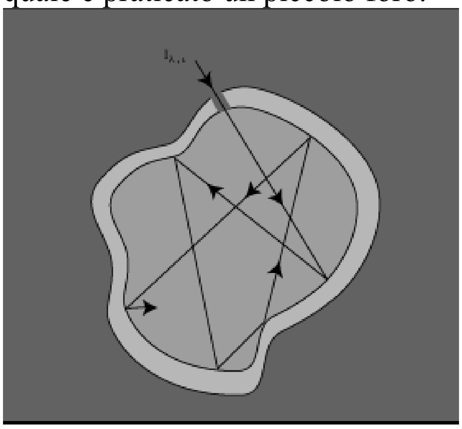
$$a_\lambda + r_\lambda = 1$$

Questi coefficienti dipendono da λ, dalla temperatura, ma anche dalle caratteristiche fisiche e geometriche del corpo (per es. dal materiale di cui esso è composto).
Si può dimostrare che, se sottoposti ad una radiazione uniforme di intensità I[1], corpi diversi hanno poteri emissivi e assorbenti diversi, ma che il loro rapporto resta costante per tutti i corpi. Considerati due diversi corpi (1) e (2), vale quindi:

$$w(1)_\lambda/a(1)_\lambda = w(2)_\lambda/a(2)_\lambda = \text{costante } W \qquad \textbf{Equazione 1}$$

In altri termini, mentre w_λ e a_λ dipendono anche da fattori relativi al corpo (fisici e geometrici), il loro rapporto è una funzione universale W, funzione di T (temperatura) e λ (lunghezza d'onda).

Definiamo ora "corpo nero" un sistema che assorbe tutta la radiazione incidente, e quindi ha $a_\lambda=1$; una buona approssimazione può essere quella di immaginare una cavità di materiale opaco, nella quale è praticato un piccolo foro.



2.2 La legge della radiazione di Kirchhoff

Si osservò come le curve dei poteri emissivi di corpi diversi approssimassero, al crescere del potere di assorbimento del singolo corpo, una curva ideale, che corrispondeva con quella relativa ad un corpo ideale con $a_\lambda=1$, appunto il "corpo nero".
Nel caso la cavità abbia **a_λ=1** (**corpo nero**), allora posso conoscere una informazione completa della radiazione in equilibrio dentro la cavità, ed indagare la struttura della radiazione.
La legge della radiazione di Kirchhoff riprende l'eq. 1, specializzandola al corpo nero:

$$w_\lambda/a_\lambda = W = W(B)_\lambda \qquad \textbf{Equazione 2 Legge di Krichhoff}$$

"Il rapporto tra potere emissivo di un corpo ed il suo potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi ad una data temperatura, e coincide con il potere emittente di un corpo nero alla stessa temperatura."

Nel 1860 Kirchhoff scriveva: "È compito della massima importanza determinare la funzione $W(B)_\lambda$. Grandi difficoltà si frappongono alla sua determinazione sperimentale. Tuttavia non appare priva di

[1] Definiamo l'intensità I come l'energia che attraversa la superficie ortogonale alla velocità di propagazione della radiazione nell'unità di tempo.

fondamento la speranza che essa abbia una forma semplice, come accade per tutte le funzioni finora note indipendenti dalle proprietà dei singoli corpi".

Lo studio della curva della funzione W [la cosiddetta "curva di corpo nero"] alle diverse λ può fornirci informazioni sulla radiazione stessa. Da un punto di vista matematico, l'energia irradiata su tutte le lunghezze d'onda per unità di tempo per unità di superficie è pari all'area sottesa dalla curva $y= W(\lambda)$.
Nel 1879 Josef Stefan ricava su basi sperimentali una dipendenza della funzione di corpo nero dalla temperatura del tipo:

$$W(b)=\sigma T^4$$ **Equazione 3: legge di Stefan – Boltzmann**

dove $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ W/m^2\ K^4$ assunse il nome di costante di Stefan – Boltzmann, dopo che Boltzmann (nel 1884) riuscì a derivare dalla teoria la legge precedente, che a sua volta è nota come legge di Stefan – Boltzmann. In particolare, Boltzmann riuscì a ricavare una dimostrazione della legge utilizzando sia risultati termodinamici, sia risultati provenienti dalla teoria elettromagnetica di Maxwell.

2.3 Le prime leggi empiriche

È negli anni '90 del XIX secolo che i dati sperimentali sono abbastanza affidabili da indurre la comunità scientifica a dedicarsi con sempre maggiori energie allo studio della curva di corpo nero. Molti comprendono che da questa possiamo ricavare informazioni sulla natura della radiazione. Nel 1893 Wien osserva la relazione:

$$\lambda_{max}\ T = \text{costante}$$ **Equazione 4 legge dello spostamento di Wien**

che viene battezzata "legge dello spostamento di Wien". In pratica, al variare della temperatura, varia la lunghezza d'onda (ovvero la frequenza) a cui si osserva una intensità di radiazione massima. La costante è pari a $2{,}898\ 10^{-3}$ m K. La legge si può scrivere, in maniera analoga, in funzione della frequenza.

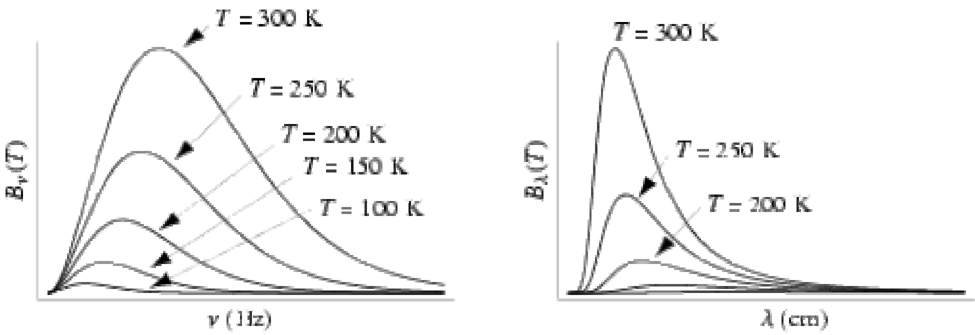


Figura 1 La legge dello spostamento utilizzando la frequenza oppure la lunghezza d'onda

<u>Un esempio</u>: la temperature superficiale del Sole è di circa 6000 K. Se sostituisco questo valore nella legge dello spostamento di Wien, ottengo un picco di emissione alla lunghezza d'onda attorno ai 500 nm, in pieno visibile.

La legge della radiazione di Wien

Wien osservò che la curva di corpo nero assomigliava alla distribuzione delle velocità di Maxwell; suppose che le analogie fossero dovute al fatto che l'emissione di radiazione era in qualche modo legata proprio all'agitazione termica, e quindi alla velocità, delle molecole del corpo nero e propose una funzione, aggiustandone i dettagli con l'aiuto dei dati sperimentali.
A partire da questa osservazione formulò la legge di Wien per la densità di energia monocromatica[2]:

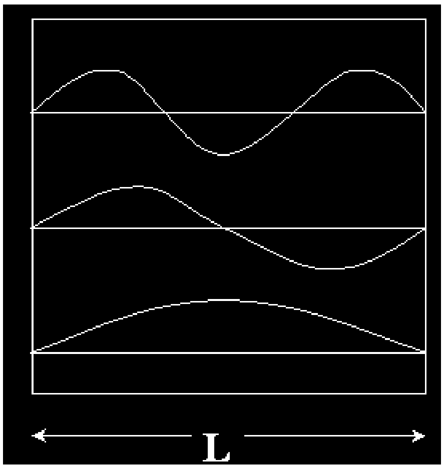
$$\psi_{\lambda} d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T}} d\lambda$$ **Equazione 5 legge di Wien**

Dove e è il numero di Nepero, la base dei logaritmi naturali, che vale approssimativamente 2,72. Le due costanti c_1 e c_2 venivano dedotte dai dati sperimentali.

La curva sembrava accordarsi, finché, proprio negli ultimi anni del XIX, gli sperimentali non riuscirono a ottenere dati precisi anche nella zona dell'infrarosso, a lunghezza d'onda superiori a 12 μ (1 μ=10^{-6} m= 10^4 Å). In questi "nuovi territori" la legge non descriveva più correttamente i valori sperimentali. La deduzione teorica della legge di Wien venne considerata "debole" dalla comunità scientifica, anche per l'incapacità di ricavare le due costanti. Planck provò a cimentarsi nel dedurla a partire da ragionamenti sull'entropia del sistema, in un lavoro che fu a fondamento del suo successivo successo nel ricavare la curva di corpo nero.

2.4 La legge di distribuzione di Rayleigh-Jeans

Con un approccio diverso, Lord Rayleigh si accinse a ricavare una nuova distribuzione. In pratica applicò il principio di equipartizione dell'energia al campo elettromagnetico interno al corpo nero. Un atomo interno alla cavità scambia energia con le onde elettromagnetiche della radiazione. Ciascuna onda stazionaria del campo e.m. veniva modellizzata con un oscillatore armonico, di energia *K*T (N:B: questo valore per l'energia si ricava dalla distribuzione di Maxwell – Boltzmann, T è la temperatura misurata in gradi Kelvin e *K* la costante di Boltzmann).
È necessario calcolare quanti oscillatori, ovvero quante onde stazionarie, ovvero quanti "modi di radiazione" esistono all'interno della cavità.
Nel caso unidimensionale, l'onda stazionaria si può scrivere:



$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

[2] Questa funzione, più pratica da misurare sperimentalmente rispetto a w_λ, esprime la densità di energia (cioè l'energia per volume) ad una certa lunghezza d'onda, e differisce dal potere emissivo w_λ (che era energia per unità di tempo e superficie) solo di un fattore moltiplicativo 4/c, con c = velocità della luce.

Dove, per essere stazionaria all'interno di una cavità di lunghezza L, la lunghezza d'onda deve essere un sottomultiplo di 2L. Cioè $\lambda = 2L/n$.

$$y = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Il numero di modi in ogni intervallo di lunghezze d'onda si trova differenziando l'espressione: $n=2L/\lambda$

Allora (a meno del segno) $dn=2L/\lambda^2\, d\lambda$

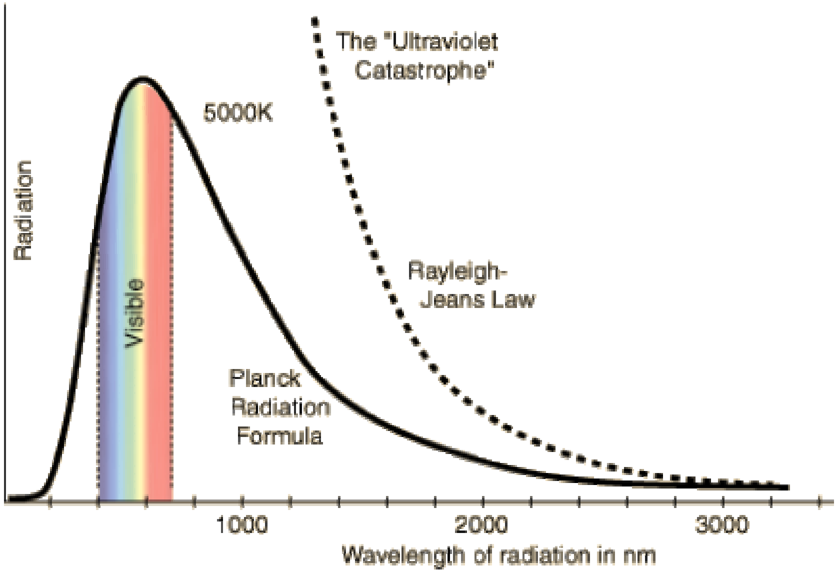
Se si ripete il ragionamento in 3 dimensioni (vedi nota 1), si trova

$$d\mathrm{n} = \frac{8\pi V}{\lambda^4}d\lambda$$

Il numero di modi per unità di volume si ottiene dividendo dn per V.
Allora la densità di energia sarà data dal numero di oscillatori per unità di volume, moltiplicata per l'energia media di un oscillatore:

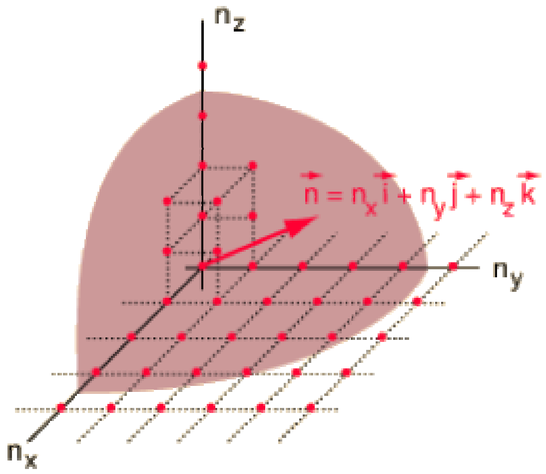
$$\psi_\lambda d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}KTd\lambda$$

Equazione 6: Legge di distribuzione di Rayleigh-Jeans



Nota 1 Calcolo numero oscillatori del corpo nero (3D) - trattazione semplificata

Per l'onda stazionaria, la lunghezza d'onda deve essere sottomultiplo del doppio della larghezza della cavità.
Come nel caso unidimensionale, vale $n=2L/\lambda$. Ora però l'onda può essere orientata in uno spazio tridimensionale, perciò n deve essere immaginato come il raggio di una sfera tridimensionale, immersa nello "spazio degli n".



Allora vale che $\mathrm{n} = \sqrt{\mathrm{n}_x^2 + \mathrm{n}_y^2 + \mathrm{n}_z^2} = 2\frac{\mathrm{L}}{\lambda}$

Il volume di tutta la sfera sarà pari a $\frac{4}{3}\pi \mathrm{n}^3 = \frac{4}{3}\pi \bullet 8\frac{\mathrm{L}^3}{\lambda^3}$

Poiché hanno senso solo gli n positivi, devo considerare l'ottante tutto positivo della sfera (divido per 8), ma moltiplicare per le due possibili polarizzazioni che può assumere un'onda elettromagnetica. Si ottiene

$$\mathrm{n} = \frac{8\pi L^3}{3\lambda^3}$$

E, a meno del segno:

$$d\mathrm{n} = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4}d\lambda = \frac{8\pi V}{\lambda^4}d\lambda$$

2.5 L'analisi di Planck

La curva trovata da Rayleigh era soddisfacente perché ricavata dalla teoria, ma prevedeva che, con il crescere della frequenza, l'energia crescesse proporzionalmente, implicando una energia emessa infinita (integrando la densità spettrale di energia su tutte le frequenze possibili si ottiene una densità di energia infinita).

D'altra parte la curva di Wien aveva una base teorica molto labile, e si dimostrava insoddisfacente a basse frequenze. Max Planck corresse la formula, aggiungendo un "-1" al denominatore, in modo da ottenere:

$$\psi_\lambda d\lambda = \frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}d\lambda \qquad \textbf{Equazione 7}$$

La formula ora era soddisfacente, nel predire i dati sperimentali, ma non era giustificata dal punto di vista teorico.

Planck riflette sul valore dell'energia del singolo oscillatore, utilizzato da R.J. $\bar{E} = KT$.

Il valore si ottiene svolgendo, come visto in aula[3],

$$\overline{E} = \frac{\int_0^\infty E dn(E)}{\int_0^\infty dn(E)} = KT \qquad \textbf{Equazione 8}$$

Tenendo conto che per la statistica classica (legge di distribuzione di Boltzmann – vedi nota 2)
$dn(E) = n_0 e^{-E/KT} dE$

Planck ipotizzò che l'energia assumesse solo valori determinati, multipli interi di una "unità" di energia, ε. Allora all'integrale si sostituisce una serie, e si trova:

$$\overline{E} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i\varepsilon e^{-i\varepsilon/KT}}{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\varepsilon/KT}} = \varepsilon \frac{1}{e^{\varepsilon/KT} - 1} \qquad \textbf{Equazione 9}$$

Questa, per ε tendente a zero, come si è visto a lezione si approssima al valore classico *K*T, ma più in generale porta ad esprimere la densità di energia come:

$$\psi_\lambda d\lambda = \overline{E}\frac{dn}{V} = \frac{8\pi}{\lambda^4}\overline{E} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/KT} - 1} d\lambda \qquad \textbf{Equazione 10}$$

Se confronto questa espressione con quella di Wien, corretta da Planck in precedenza, deve valere che:

$$\frac{\varepsilon}{KT} = \frac{c_2}{\lambda T}$$

Da cui **$\varepsilon = h\nu$** **Equazione 11 INTRODUZIONE DEL QUANTO DI ENERGIA**

L'energia ε non è quindi piccola a piacere, ma multipla secondo la costante h (costante di Planck), della frequenza.
Posso quindi scrivere nella forma consueta la LEGGE DELLA RADIAZIONE DI PLANCK, per la quale lo scienziato ebbe il premio Nobel per la fisica nel 1918.

$$\psi_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda KT} - 1} d\lambda \qquad \textbf{Equazione 12 legge di Planck}$$

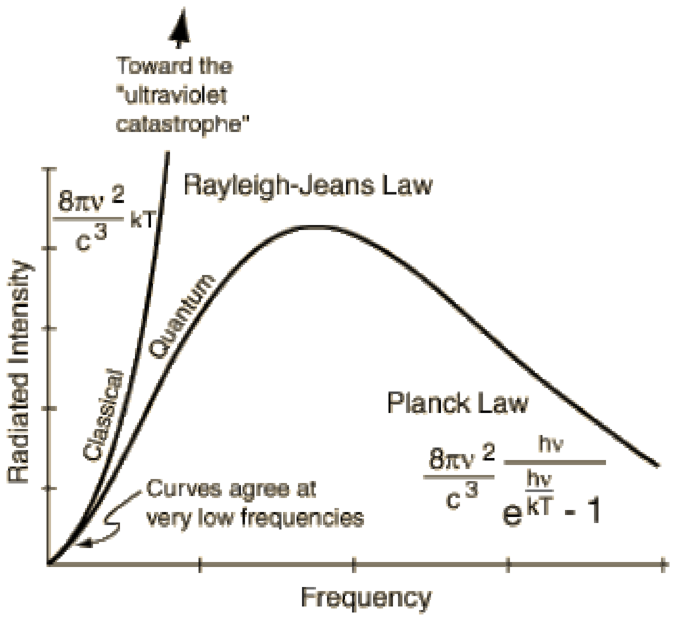
Nota: h = costante di Planck= $6{,}626 \; 10^{-34}$ Js
c = velocità della luce nel vuoto = 299 792 458 m s^{-1} =3 10^8 m s^{-1}

La legge si può scrivere anche in funzione della frequenza:

---

[3] In particolare si ricorda che vale: $\int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx - 1)$

$$\psi_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/KT}-1}d\nu$$ **Equazione 13 legge di Planck**



"Assai meno comoda fu l'interpretazione della seconda costante universale della legge di radiazione, che io designai come quanto elementare di azione, perché rappresenta il prodotto di un'energia per un tempo (secondo il primo calcolo 6,55.10-27 erg. s).

Mentre essa era assolutamente indispensabile [...] sorgevano delle gravi difficoltà quando si cercava di inquadrarla in qualche maniera nella teoria classica. Tutto andava bene finché si poteva considerare tale costante come infinitamente piccola, e cioè per grandi energie e lunghi periodi di tempo; ma nel caso generale c'era in qualche punto una lacuna che diventava tanto più incolmabile quanto più si passava ad oscillazioni piccole e veloci.

Il fallimento di ogni tentativo di colmar la lacuna presto non lasciò più dubbi: o il quanto di azione era una grandezza fittizia, ed allora tutta la deduzione della legge di irradiazione era illusoria in linea di principio e non rappresentava altro che un giochetto di formule senza contenuto; oppure la deduzione della legge di irradiazione poggiava su di un reale pensiero fisico, ed allora il quanto di azione doveva avere un'importanza fondamentale in fisica, ed annunciava qualche cosa completamente nuova ed inaudita che pareva intenzionata a rivoluzionare il nostro pensiero fisico basato, fin da quando Leibnitz e Newton avevano fondato il calcolo infinitesimale, sull'ipotesi della continuità di tutti i rapporti causali.

L'esperienza decise per la seconda alternativa. La rapida ed indubbia decisione non fu però dovuta al controllo della legge di distribuzione dell'energia della radiazione termica e tanto meno alla speciale deduzione che di questa legge io diedi, bensì ai lavori di quegli scienziati che si servirono del quanto di azione per le loro ricerche.

Il primo impulso in questo campo fu dato da Einstein, il quale fece notare che l'introduzione dei quanti di energia, presupponenti il quanto di azione, sembrava adatta a chiarire in modo semplice una serie di importanti osservazioni fatte sugli effetti della luce come l'emissione di elettroni [...]."

M. Planck, *Conferenza del* 2 *giugno 1920,* in M. Planck, *La conoscenza del mondo fisico,* Einaudi.

Nota 2 La statistica di Maxwell-Boltzmann

Introduzione

Considero un sistema isolato di particelle, che possono assumere diversi livelli di energia, labellati con E_i . In ognuno di questi livelli si trovano n_i particelle.Il numero totale delle particelle è:

$$N = \sum_i n_i$$

Mentre l'energia totale del sistema si ottiene sommando:

$$E = \sum_i n_i E_i$$

Le particelle interagendo si scambiano energia, ma la somma resta costante (il sistema è appunto isolato). Tra tutti i possibili modi in cui l'energia si può distribuire tra tute le particelle, ne esiste uno più probabile. Quando il sistema si trova in questo modo, è detto in equilibrio statistico.
Il problema della meccanica statistica è quello di individuare la partizione più probabile, utilizzando una opportuna curva di distribuzione.
Trovata la partizione più probabile, cercherò poi di dedurre alcune caratteristiche osservabili (macroscopiche) del mio sistema.
Ricordiamo 3 leggi di distribuzioni (o "statistiche"):

di Maxwell-Boltzmann
di Fermi – Dirac
di Bose – Einstein

La seconda e la terza statistica si utilizzano in meccanica quantistica (F-D per i fermioni, B-E per i bosoni), qui diamo qualche accenno alla prima.

Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Si consideri un insieme di particelle identiche e distinguibili.
Voglio studiare come si distribuisce l'energia tra le particelle. Date le due ipotesi:

-tutti i livelli dell'energia sono equamente probabili
-la probabilità di una determinata partizione è proporzionale al numero di modi diversi in cui si può ottenere la partizione stessa

Si dimostra che in ogni livello energetico si trovano un numero di particelle:

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta E_i}$$

Dove n_i è il numero delle particelle nello stato energetico E_i, g_i è il peso statistico di ciascun livello, ovvero la probabilità di trovare una particella nel livello di energia E_i
Si trova che α è un parametro che dipende dal numero delle particelle, mentre β ci permette di definire una quantità, che chiamo "temperatura assoluta", attraverso la relazione:
$KT = 1/\beta$.

La distribuzione di Boltzmann si può scrivere:

$$dn(E) = n_0 e^{-E/KT} dE$$

Dove K è la costante di Boltzmann e vale

K_B= 1,38 10^{-23} J K^{-1} = 8,62 10^{-5} eV K^{-1}

Nota: Si ricorda che $K_B = R / N_A$, cioè la costante di Boltzmann è pari al rapporto tra la costante universale dei gas R e il numero di Avogadro.

Nota 3

È bene riguardarsi i concetti fondamentali che intervengono nel definire un'onda:
Es. le definizioni principali, come quelle di
Lunghezza d'onda λ
Periodo T
Frequenza ν=1/T
Come si trovano sui libri delle scuole superiori.

Ricordarsi che per le onde elettromagnetiche vale la fondamentale relazione

$$\lambda = c/\nu$$

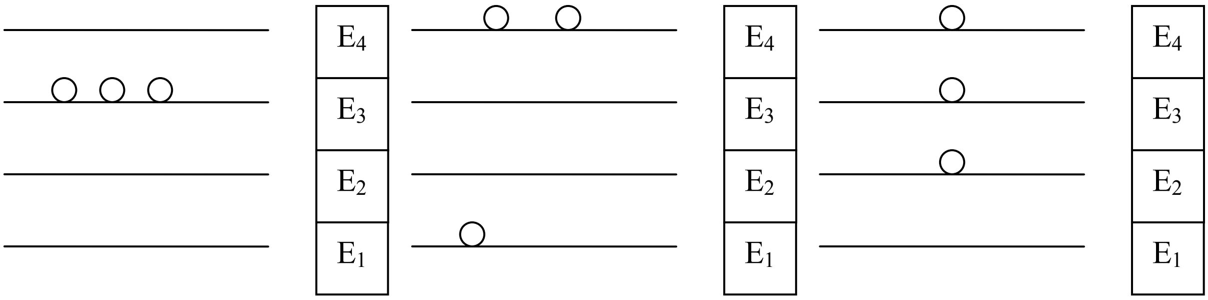
dove c è la velocità della luce, pari a circa 3 10^8 m s^{-1}

Due semplici esempi.

a) Per il calcolo del numero di modi in un intervallo di lunghezza d'onda.

Siamo nel caso di una cavità monodimensionale. Abbiamo visto che, se la cavità è lunga L, ho onde stazionarie quando la lunghezza d'onda è sottomultipla di 2L, quindi quando vale che λ= 2L/n.
Viceversa possiamo dire che il modo "n" è definito dalla relazione inversa: n=2L/λ.
Abbiamo introdotto come "numero di modi in un intervallo di lunghezza d'onda" il dn che si ottiene differenziando l'espressione in funzione della lunghezza d'onda. Matematicamente questo è vero solo per intervalli di λ infinitesimi. Allora (a meno del segno) $dn=2L/\lambda^2\, d\lambda$
Voglio ora vedere quanto, nel caso concreto, questa mia "imposizione" è sensata.
Considero una cavità lunga L=300 cm.
Il modo n=1 si ha con una λ=600 cm. Il modo 2 con λ=300 cm, il modo 3 con λ=200 cm, etc.
Viceversa, a che numero di modo corrisponde la lunghezza d'onda λ=100 cm?
Dalla formula n=2L/λ ottengo n=6.
Voglio ora calcolare quanti modi (quante diverse onde stazionarie) ho tra λ*=1 cm e λ^=1,1 cm.
Utilizzando la formula n=2L/λ ottengo n*= 600 e n^ ~545. Allora nell'intervallo tra le due λ avrò circa (n*-n^)=55 modi. Potrei anche calcolare che lunghezza d'onda hanno tutti questi 55 modi compresi, cioè per es. con n=546, n=547 etc fino ad arrivare ad n=600.
Utilizzo ora la formula differenziale, ricordando che in teoria dovrei utilizzarla per intervalli infinitesimi. Ottengo $dn=2L/\lambda^2\, d\lambda=600/(1)^2\,(1{,}1-1)=60$
In effetti, già in questo esempio molto grossolano, si trova che la legge consente una buona approssimazione.

b) Per chiarire cosa significa che "una partizione si può ottenere nelle ipotesi di Boltzmann in modi diversi"
Si abbia l'energia totale $E=9E_0$, e dei possibili livelli energetici $E_1= E_0$, $E_2= 2E_0$, $E_3= 3E_0$, $E_4= 4E_0$.
Immagino di avere 3 molecole. Che partizioni posso avere? Ne considero 3:



La prima partizione, dette a,b e c le tre molecole, si può ottenere solo in un modo, la seconda in tre, perché la particelle in E_1 può essere a,b,c, la terza in sei modi (per es. se la più energetica è a, b e c possono scambiarsi il posto, e così via).
Allora, la partizione che si può ottenere in più modi è la terza, e per Boltzmann è di conseguenza quella più probabile.

Bibliografia

Per i temi trattati è possibile riferirsi a moltissimi testi. Solo come esempio ricordiamo:
Enge-Wehr_Richards, *Introduction to atomic physics*, Addison Wesley, cap. 3
N.B. Le trattazioni a volte differiscono leggermente da un testo all'altro. Nella lezione si è cercata sempre la via che appariva più semplice. L'obiettivo da raggiungere è quello di arrivare con un procedimento consistente dal punto di vista logico e fisico al risultato finale.

Letture **consigliate**

La trattazione presentata è molto semplificata. Questo elimina molto del sapore che una analisi più approfondita delle memorie originali permetterebbe di cogliere.
A chi desideri approfondire il reale cammino seguito per arrivare ad introdurre il quanto d'azione, consiglio i seguenti volumi, storicamente più accurati:

- Kuhn, T.S. Alle origini della fisica contemporanea. La teoria del corpo nero e la discontinuità quantica, il Mulino, 1981
- Longair, M. Theoretical Concepts in Physics An Alternative View of Theoretical Reasoning in Physics, Cambridge, parte 5.
- Bellone, E. Caos e Armonia, UTET, cap. 13

Materiali

Articolo originale di Planck in inglese
http://dbhs.wvusd.k12.ca.us/webdocs/Chem-History/Planck-1901/Planck-1901.html

mappa concettuale didattica con spunti ad oggi (es. radiazione cosmica di fondo)
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/bbcon.html#c1

Applet corpo nero (temp/lambda):
http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/blackbody/black.htm
http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/light/planck.html
gioco "indovina la temperatura del corpo nero che emette tale curva":
http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/light/blackbody.html

come si forma un'onda stazionaria all'interno di una cavità:
http://www.walter-fendt.de/ph14i/stwaverefl.htm

Appendici.

Un esempio dei multipli e sottomultipli delle unità di misura:

chilometro = km = 10^3 m = 1000 m
metro = m
millimetro = mm = 10^{-3} m = 0,001 m = 1/1000 m
micrometro = micron = μm = 10^{-6} m
nanometro = nm = 10^{-9} m
Angstrom= Å= 10^{-10} m
picometro = pm = 10^{-12} m
femtometro = fermi= fm = 10^{-15} m

Alcune costanti (già introdotte o che verranno probabilmente introdotte in seguito)

Planck constant h
$6.6260755 \cdot 10^{-34}$ J·s
Boltzmann constant k_B
$1.380658 \cdot 10^{-23}$ J/K
(= $8.617385 \cdot 10^{-5}$ eV/K)
Elementary charge e
$1.60217733 \cdot 10^{-19}$ C
Avogadro number N_A
$6.0221367 \cdot 10^{23}$ particles/mol
Speed of light c
$2.99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
Electron rest mass m_e
$9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Proton rest mass m_p
$1.6726231 \cdot 10^{-27}$ kg
Neutron rest mass m_n
$1.6749286 \cdot 10^{-27}$ kg
Charge-to-mass ratio for the electron e / m_e
$1.75880 \cdot 10^{11}$ C/kg
Atomic mass unit amu
$1.66054 \cdot 10^{-27}$ kg
Bohr radius a_0
$5.29177 \cdot 10^{-11}$ m
Electron radius r_e
$2.81792 \cdot 10^{-15}$ m
Gas constant R
$R = N_A\, k_B$
8.31451 $m^2 \cdot kg/s^2 \cdot K \cdot mol$
Acceleration due to gravity g
9.80665 m/s^2
Costante di Rydberg
1.0973731534 10^7 1/m
Costante di Stefan-Boltzman σ
5,67 10^{-8} $W/m^2\, K^4$